TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIII-a 2023,
Târgu Lăpuș, 26.08.2023-01.09.2023
Clasa a VII-a

1. a. Arătați că pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ au loc inegalitățile

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n < \frac{1+4^n}{1+5^n} < \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}.$$

b. Determinați numărul de elemente al mulțimii

$$A = \left\{k \in \mathbb{N} \ \middle|\ \left(\frac{4}{5}\right)^3 < \frac{k^2+4^3}{k^2+5^3} < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \text{ și } \sqrt{k} \in \mathbb{N}\right\}.$$

2. Fie triunghiul ABC și punctele D, E, F mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$ respectiv $[CA]$. Fie $M \in (EF$ astfel încât $[EF] = [FM]$ și $N \in (CD$ astfel încât $[CD] = [DN]$.

a. Arătați că $3AM = MN$.

b. Dacă $NE \cap AB = \{P\}$ și $CP \cap NB = \{S\}$, arătați că punctele S, D și F sunt coliniare.

3. Determinați numerele naturale $x, y \in \mathbb{N}$ pentru care are loc egalitatea

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{y+2} + \sqrt{68-x-y} = 15.$$

***Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7*.**
Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ_CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIII-a 2023,
Târgu Lăpuș, 26.08.2023-01.09.2023
Clasa a VII-a
<u>BAREM</u>

1. a. Arătați că pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ au loc inegalitățile

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n < \frac{1+4^n}{1+5^n} < \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}.$$

b. Determinați numărul de elemente al mulțimii

$$A = \left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, \left(\frac{4}{5}\right)^3 < \frac{k^2+4^3}{k^2+5^3} < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \text{ și } \sqrt{k} \in \mathbb{N}\right\}.$$

Soluție:

a.

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n < \frac{1+4^n}{1+5^n} \Leftrightarrow 4^n < 5^n$$ **1 punct**

$$5^{n-1}(1+4^n) < 4^{n-1}(1+5^n) \Leftrightarrow 5^{n-1} + 5^{n-1} \cdot 4^n < 4^{n-1} + 5^n \cdot 4^{n-1}$$
$$\Leftrightarrow 0 < 4^{n-1} + 5^n \cdot 4^{n-1} - 5^{n-1} \cdot 4^n - 5^{n-1} \Leftrightarrow 0 < 4^{n-1} + 5^{n-1} \cdot 4^{n-1} - 5^{n-1}$$
$$\Leftrightarrow 0 < \underbrace{4^{n-1}}_{>0} + 5^{n-1} \cdot \underbrace{(4^{n-1}-1)}_{\geq 0}, \text{ adevărat} \Longrightarrow \frac{1+4^n}{1+5^n} < \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$ **1 punct**

Finalizare **0,5 puncte**

b.

Din
$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 < \frac{k^2+4^3}{k^2+5^3} \Longrightarrow k^2 \geq 1$$ **1 punct**

Din
$$\frac{k^2+4^3}{k^2+5^3} < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Longrightarrow k^2 \leq 44$$ **1 punct**

Din $1 \leq k^2 \leq 44$ se obține $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **1 punct**

Cum $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$ rezultă

$$A = \{1,4\}$$ **1 punct**

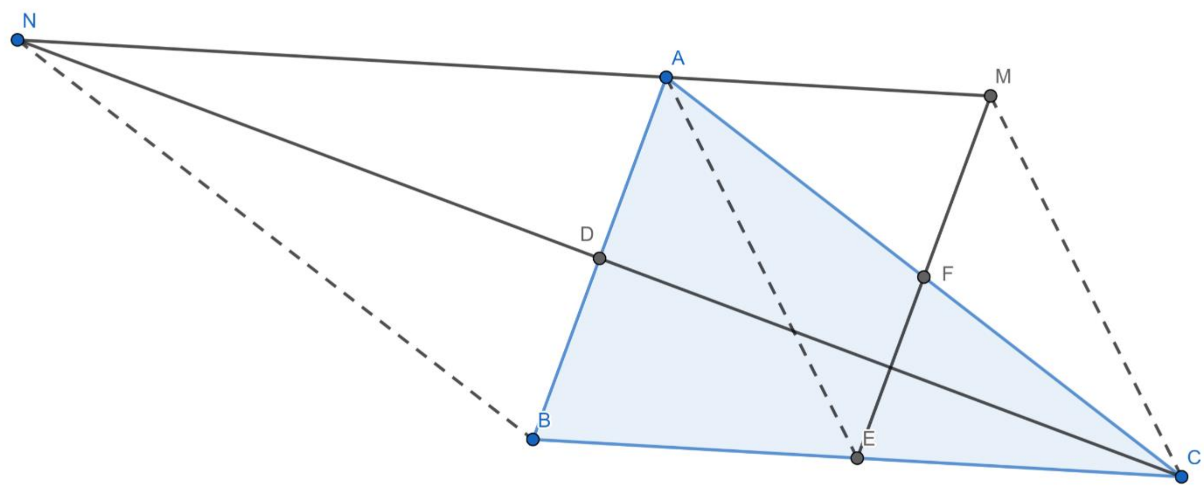
deci mulțimea A are două elemente. **0.5 puncte**

2. Fie triunghiul ABC și punctele D, E, F mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$ respectiv $[CA]$. Fie $M \in (EF$ astfel încât $[EF] = [FM]$ și $N \in (CD$ astfel încât $[CD] = [DN]$.

a. Arătați că $3AM = MN$.

b. Dacă $NE \cap AB = \{P\}$ și $CP \cap NB = \{S\}$, arătați că punctele S, D și F sunt coliniare.

Soluție:



a.

$AMCE$ paralelogram **1 punct**

$ACBN$ paralelogram **1 punct**

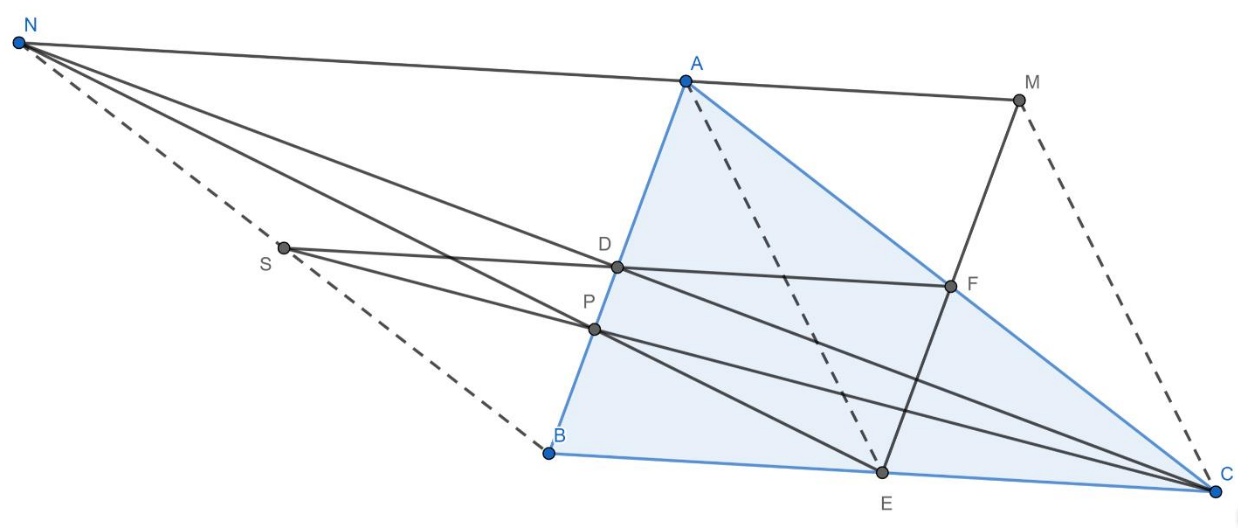
$$AM = CE = \frac{1}{2}BC$$ **0,25 puncte**

$$AN = BC = 2AM$$ **0,25 puncte**

$NA \parallel BC$, $MA \parallel BC$, deci N, A, M coliniare **1 punct**

$$NM = NA + AM = 3AM$$ **0,5 puncte**

b.



În triunghiul NBC, segmentele NE și BD sunt mediane **1 punct**

P este centrul de greutate al triunghiului NBC, deci CS mediană **1 punct**

$SD \parallel BC$, $DF \parallel BC$, deci S, D, F coliniare **1 punct**

3. Determinați numerele naturale $x, y \in \mathbb{N}$ pentru care are loc egalitatea

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{y+2}+\sqrt{68-x-y}=15.$$

Soluție:

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{y+2}+\sqrt{68-x-y} \leq \sqrt{3[(x+5)+(y+2)+(68-x-y)]}$$ **1 punct**

Se arată că

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{y+2}+\sqrt{68-x-y} \leq 15$$ **2 puncte**

Cazul de egalitate pentru

$$x+5=y+2=68-x-y$$ **2 puncte**

Se obține

$$x=20 \text{ și } y=23$$ **2 puncte**